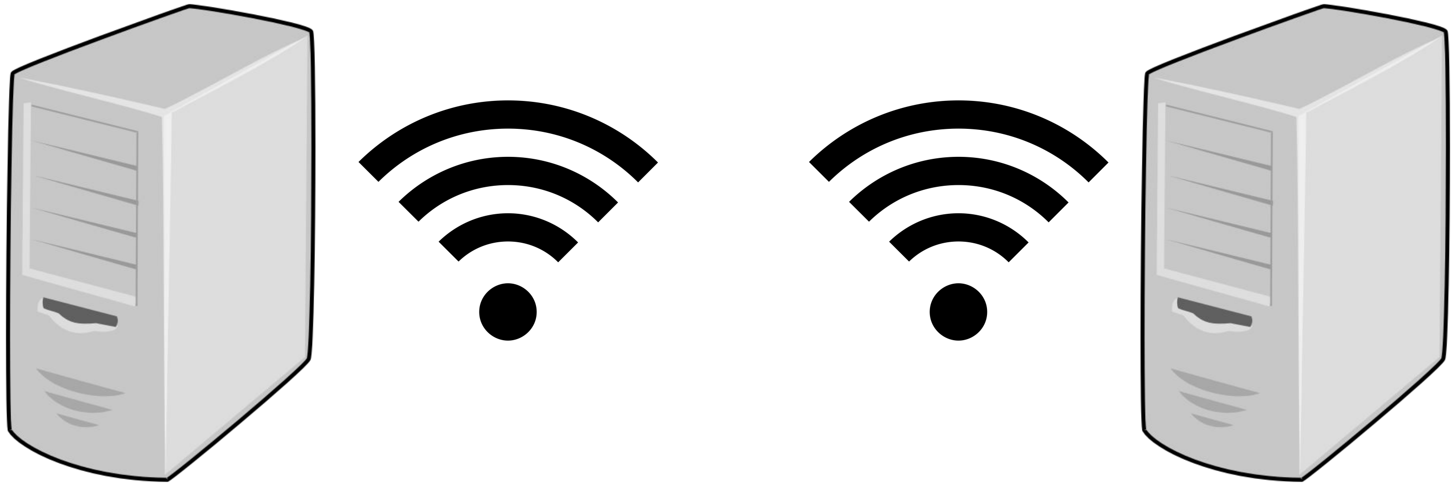
Probabilité d’erreur de récepteurs à échantillonnage imparfait

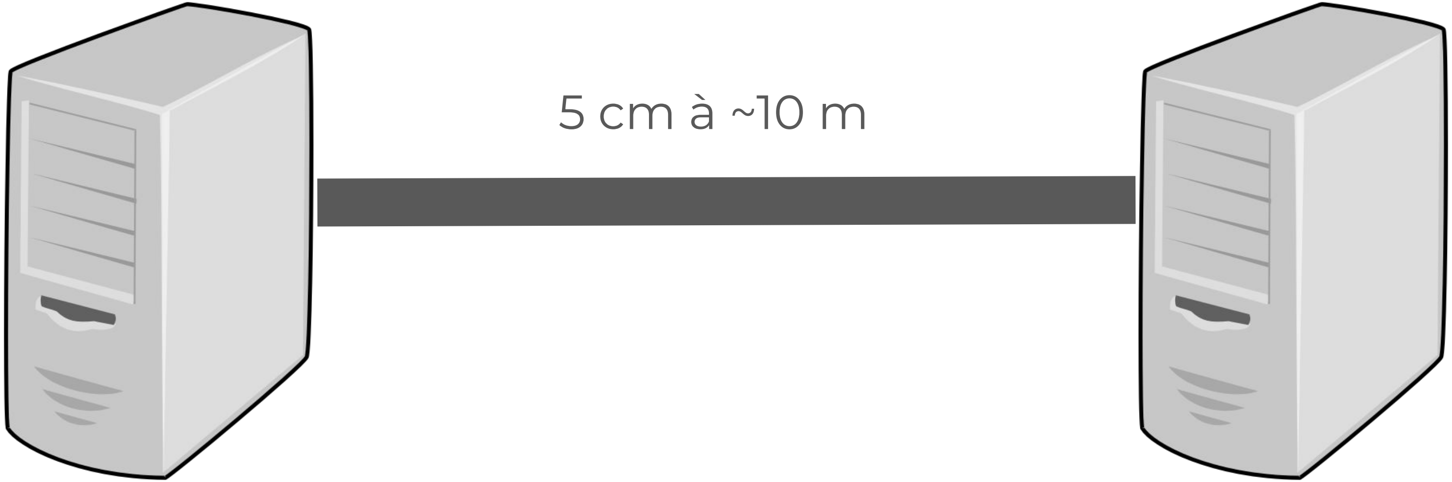
Salim Najib - pour Kandou Bus SA
Aperçu en ModStoch - 18.10.2024

Kan-quoi?



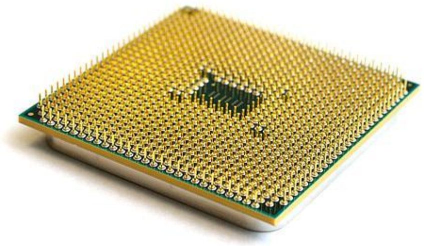
Kan-quoi?

Kan-quoi?



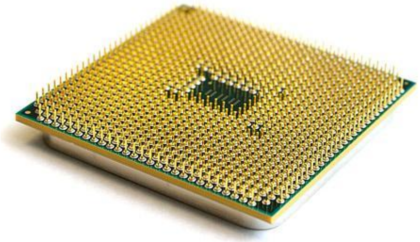
Kan-quoi?

Kan-quoi?

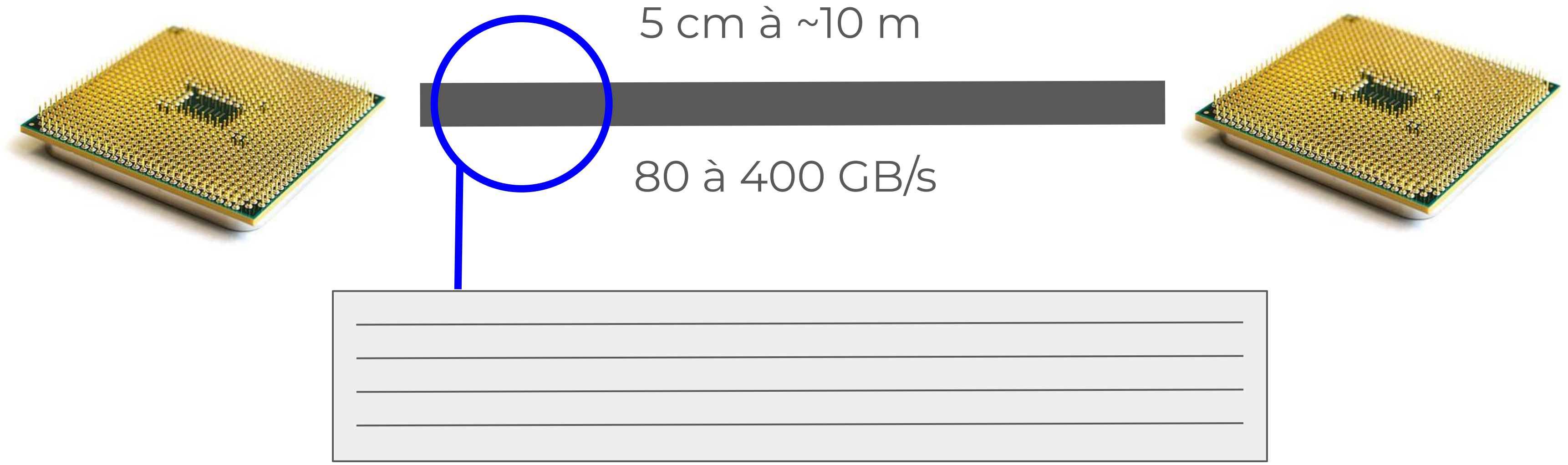


5 cm à ~10 m

80 à 400 GB/s



Kan-quoi?



COM-302 Principles of Digital Comms, en 1 minute

Emetteur

Canal

Récepteur

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

COM-302 Principles of Digital Comms, en 1 minute

Emetteur

Canal

Récepteur

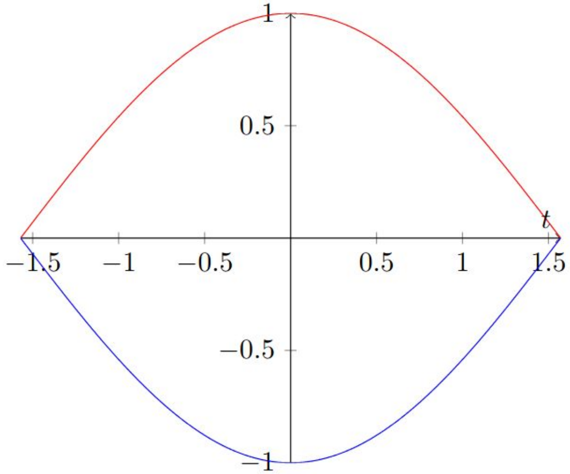
$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \mapsto$$

COM-302 Principles of Digital Comms, en 1 minute

Encodeur

$$b_i = 0 \implies x_i(t) = 1 \times a\cos(\omega t)$$

$$b_i = 1 \implies x_i(t) = -1 \times a\cos(\omega t)$$



COM-302 Principles of Digital Comms, en 1 minute

Emetteur

Canal

Récepteur

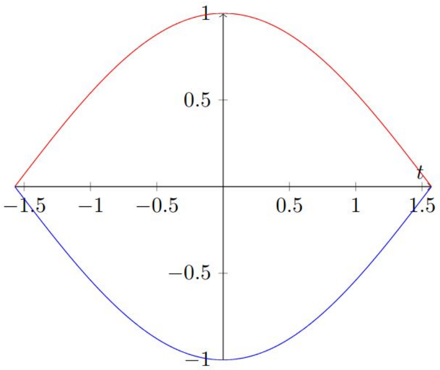
$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \mapsto$$

$$\mapsto \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_4 \end{bmatrix}$$

Fonctionnement du récepteur

Récepteur

$$y(t) = \pm a \cos(\omega t)$$



$$y(0) > 0 \implies \hat{b}_i = 0$$

$$y(0) < 0 \implies \hat{b}_i = 1$$

COM-302 Principles of Digital Comms, en 1 minute

Emetteur

Canal

Récepteur

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \mapsto$$

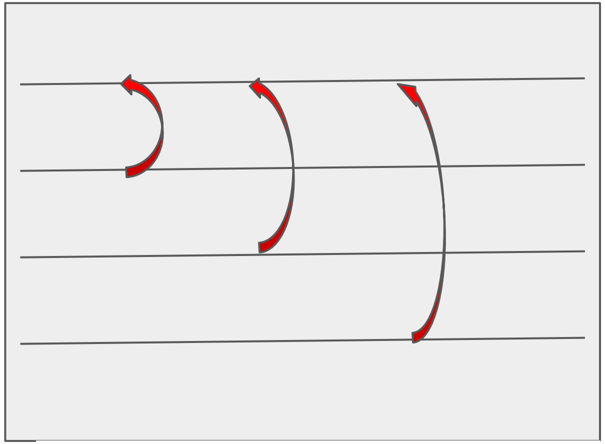
$$\mapsto \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_4 \end{bmatrix}$$

$$\{N(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \sigma_n^2\right)$$

COM-302 Principles of Digital Comms, en 1 minute

Emetteur | Canal | Récepteur

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} \mapsto$$



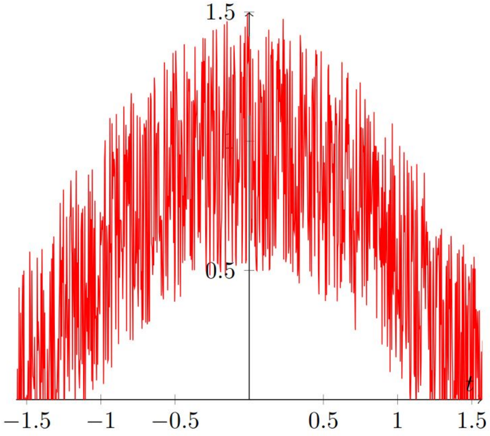
$$\mapsto \begin{bmatrix} \hat{b}_1 \\ \hat{b}_2 \\ \hat{b}_3 \\ \hat{b}_4 \end{bmatrix}$$

$$\{N(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \sigma_n^2\right)$$

Fonctionnement du récepteur

Récepteur

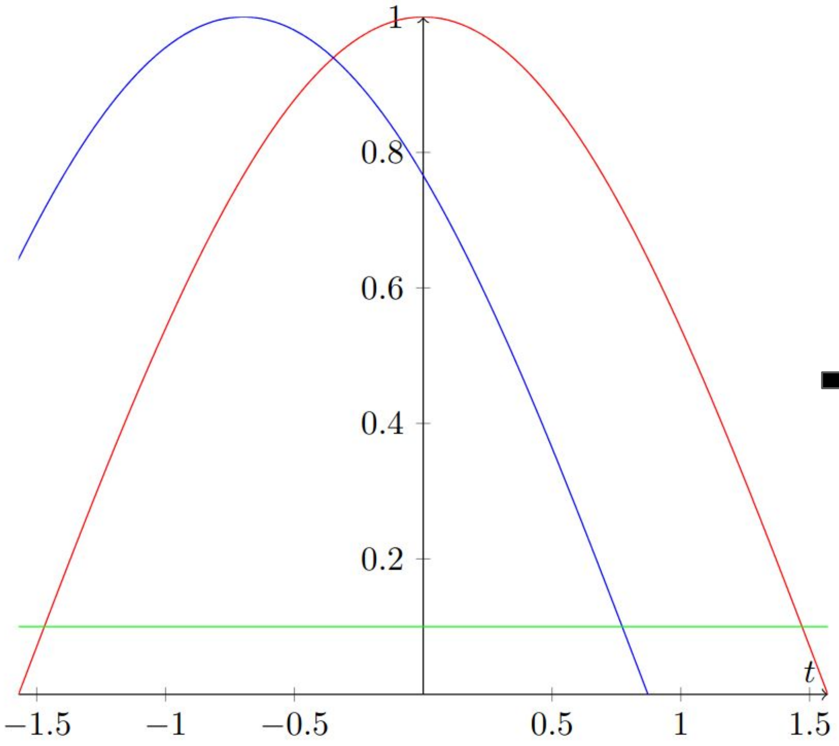
$$y(t) = \pm a\cos(\omega t) + N(t)$$



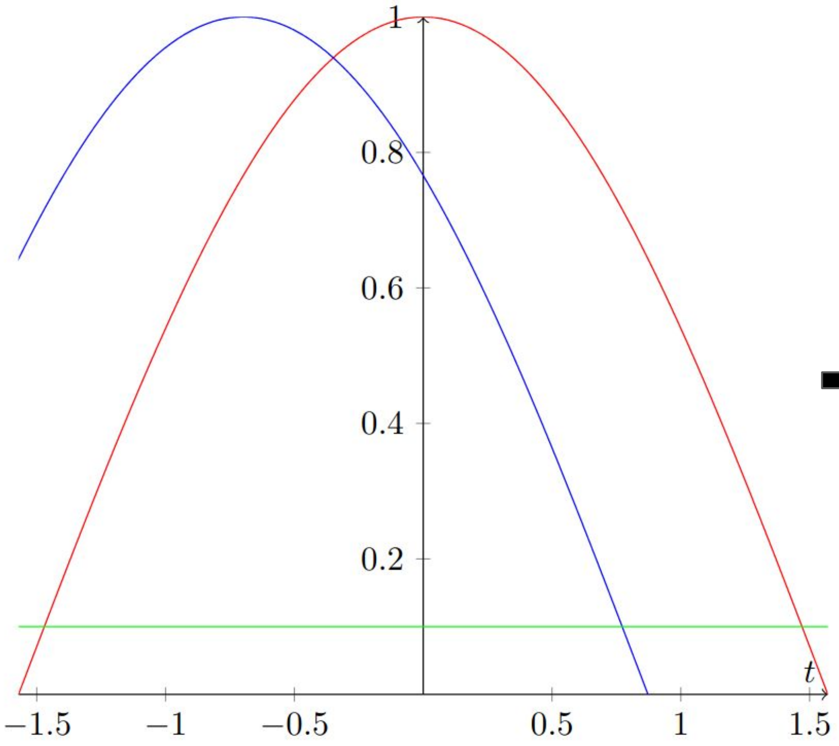
$$y(0) > 0 \implies \hat{b}_i = 0$$

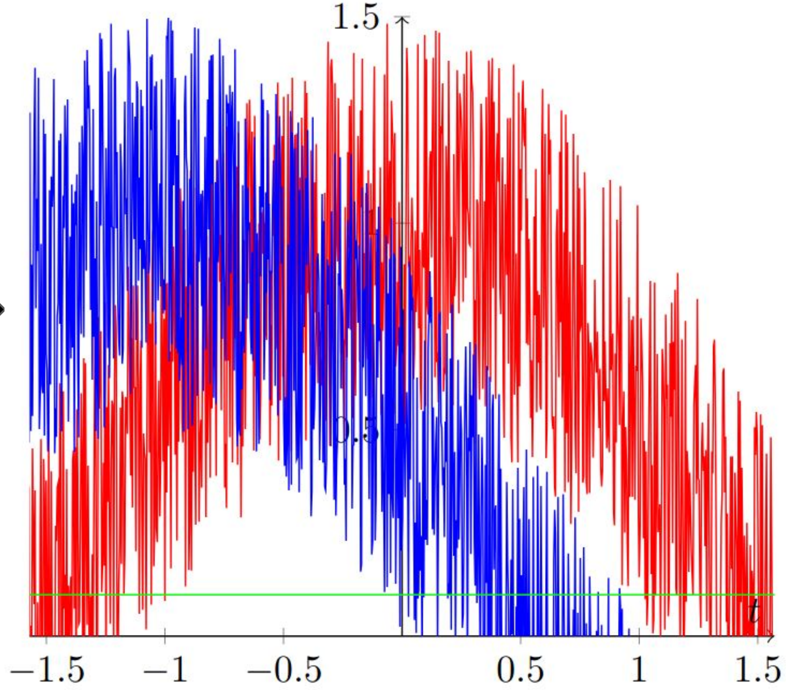
$$y(0) < 0 \implies \hat{b}_i = 1$$

Echantillonnage imparfait



Echantillonnage imparfait





Formulation mathématique

$$y(t) = \pm a \cos(\omega(t + R_j)) + N(t)$$

$$y(0) > x_0 \iff \hat{b}_i = 0$$

$$R_j \sim \mathrm{Unif}(-3\sigma_j, 3\sigma_j)$$

$$\{N(t)\}_{t \in \mathbb{R}} \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \sigma_n^2\right)$$

$$b_i \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$$

Formulation mathématique

$$R_j \sim \mathrm{Unif}(-3\sigma_j, 3\sigma_j)$$

$$\{N(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \sigma_n^2\right)$$

$$b_i \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$y(t) = \pm a\cos(\omega(t + R_j)) + N(t)$$

$$y(0) > x_0 \iff \hat{b}_i = 0$$

$$\begin{aligned}
P_e &= \mathbb{P}(b_i \neq \hat{b}_i) \\
&= \mathbb{P}(b_i = 0, \hat{b}_i = 1) + \mathbb{P}(b_i = 1, \hat{b}_i = 0) \ \text{(loi des probas totales)} \\
&= \mathbb{P}(\hat{b}_i = 1 | b_i = 0)
\end{aligned}$$

Formulation mathématique

$$R_j \sim \text{Unif}(-3\sigma_j, 3\sigma_j)$$

$$y(t) = \pm a\cos(\omega(t + R_j)) + N(t)$$

$$\{N(t)\}_{t\in\mathbb{R}} \overset{\text{i.i.d}}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \sigma_n^2\right)$$

$$y(0) > x_0 \iff \hat{b}_i = 0$$

$$b_i \sim \text{Ber}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}
P_e &= \mathbb{P}(b_i \neq \hat{b}_i) \\
&= \mathbb{P}(b_i = 0, \hat{b}_i = 1) + \mathbb{P}(b_i = 1, \hat{b}_i = 0) \ \text{(loi des probas totales)} \\
&= \mathbb{P}(\hat{b}_i = 1 | b_i = 0) \\
&= \mathbb{P}(y(0) \leq x_0 | b_i = 0) \\
&= \mathbb{P}(a\cos(\omega R_j) + N(0) \leq x_0)
\end{aligned}$$

Calcul de la probabilité d'erreur

Notons $N(0) = \sigma_n Z,\ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$
\begin{aligned}
P_e &= \mathbb{P}(N(0) \leq x_0 - a\cos(\omega R_j)) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{\sigma_n}\left(x_0 - a\underbrace{\cos(\omega R_j)}_{=W}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{\sigma_n}\left(x_0 - aW\right)\right)
\end{aligned}
$$

Calcul de la probabilité d’erreur

Notons $N(0) = \sigma_n Z,\ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$
\begin{aligned}
P_e &= \mathbb{P}(N(0) \leq x_0 - a\cos(\omega R_j)) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{\sigma_n}\left(x_0 - a\underbrace{\cos(\omega R_j)}_{=W}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{\sigma_n}(x_0 - aW)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{\sigma_n}(x_0 - aw)\right) f_W(w)\,\mathrm{d}w \text{ (loi des probas totales)}
\end{aligned}
$$

Calcul de la probabilité d'erreur

Notons $N(0) = \sigma_n Z,\ Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$
\begin{aligned}
P_e &= \mathbb{P}(N(0) \leq x_0 - a\cos(\omega R_j)) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{\sigma_n}\left(x_0 - a\underbrace{\cos(\omega R_j)}_{=W}\right)\right) \\
&= \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{\sigma_n}\left(x_0 - aW\right)\right) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{1}{\sigma_n}\left(x_0 - aw\right)\right) f_W(w)\ \mathrm{d}w \text{ (loi des probas totales)} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{1}{\sigma_n}\left(x_0 - aw\right)\right) f_W(w)\ \mathrm{d}w
\end{aligned}
$$

Calcul de la densité transformée

$$W = g(\omega R_j) = \cos(\omega R_j),\ \ \omega R_j \sim \mathrm{Unif}(-3\omega\sigma_j, 3\omega\sigma_j)$$

Calcul de la densité transformée

$$W = g(\omega R_j) = \cos(\omega R_j),\ \ \omega R_j \sim \mathrm{Unif}(-3\omega\sigma_j, 3\omega\sigma_j)$$

11. Soit X une variable aléatoire uniforme dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Quelle est la densité de probabilité de la v.a. $Y = \sin X$? Que valent sa moyenne et sa variance ?

Calcul de la densité transformée

$$W = g(\omega R_j) = \cos(\omega R_j),\ \omega R_j \sim \mathrm{Unif}(-3\omega\sigma_j, 3\omega\sigma_j)$$

11. Soit X une variable aléatoire uniforme dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Quelle est la densité de probabilité de la v.a. $Y = \sin X$? Que valent sa moyenne et sa variance ?

$$f_W(w) = f_{g(\omega R_j)} = \sum_{t:\ g(t)=w} \frac{f_{\omega R_j}(t)}{|g'(t)|}$$

Calcul de la densité transformée

$$W = g(\omega R_j) = \cos(\omega R_j),\ \omega R_j \sim \mathrm{Unif}(-3\omega\sigma_j, 3\omega\sigma_j)$$

11. Soit X une variable aléatoire uniforme dans l'intervalle $[0, 2\pi]$. Quelle est la densité de probabilité de la v.a. $Y = \sin X$? Que valent sa moyenne et sa variance ?

$$f_W(w) = f_{g(\omega R_j)} = \sum_{t:\ g(t)=w} \frac{f_{\omega R_j}(t)}{|g'(t)|}$$

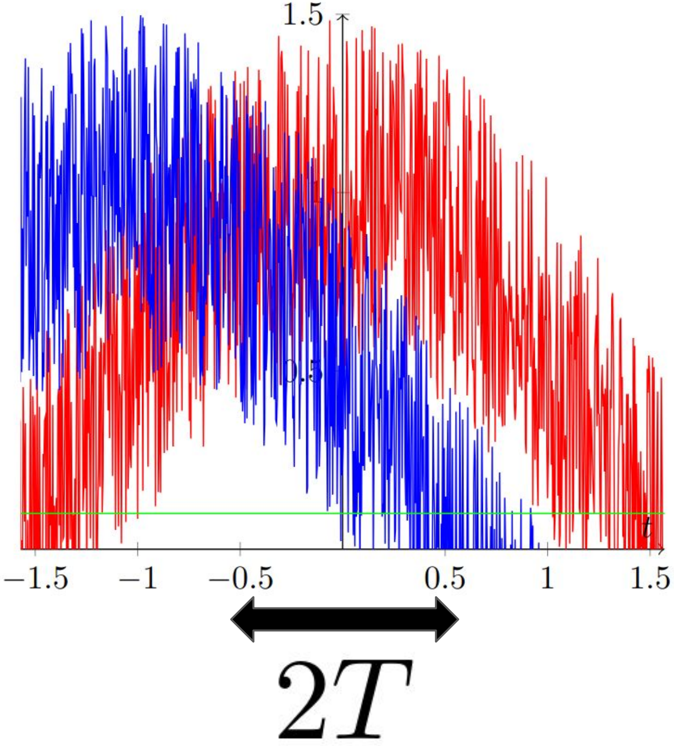
$$= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{3}\omega\sigma_j\sqrt{1-w^2}} & \text{si } w \in]\cos(\sqrt{3}\omega\sigma_j), 1[\\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Résultat final

En injectant ce résultat dans la probabilité d'erreur :

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{3}\omega\sigma_j} \int_{\cos(\sqrt{3}\omega\sigma_j)}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \Phi\left(\frac{1}{\sigma_n}(x_0 - aw)\right) \, \mathrm{d}w$$

Pour aller plus loin : filtrage



Pour aller plus loin : filtrage

$$P_e = \mathbb{P}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+R_j) + N(t)\ \mathrm{d}t \leq x_0\right)$$

Pour aller plus loin : filtrage

$$
\begin{aligned}
P_e &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+R_j) + N(t)\ \mathrm{d}t \le x_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+R_j)\ \mathrm{d}t + \underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} N(t)\ \mathrm{d}t}_{N_T \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_n^2}{2T}\right)} \le x_0\right)
\end{aligned}
$$

Pour aller plus loin : filtrage

$$\begin{aligned}
P_e &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+R_j) + N(t)\ \mathrm{d}t \leq x_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+R_j)\ \mathrm{d}t + \underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} N(t)\ \mathrm{d}t}_{N_T \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_n^2}{2T}\right)} \leq x_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega(t+R_j))\ \mathrm{d}t + N_T \leq x_0\right)
\end{aligned}$$

Pour aller plus loin : filtrage

$$\begin{aligned}
P_e &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+R_j) + N(t)\ \mathrm{d}t \leq x_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+R_j)\ \mathrm{d}t + \underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} N(t)\ \mathrm{d}t}_{N_T \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_n^2}{2T}\right)} \leq x_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega(t+R_j))\ \mathrm{d}t + N_T \leq x_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\underbrace{a\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)}_{=a_T}\cos(\omega R_j) + N_T \leq x_0\right)
\end{aligned}$$

Pour aller plus loin : filtrage

$$
\begin{aligned}
P_e &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+R_j) + N(t)\ \mathrm{d}t \leq x_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+R_j)\ \mathrm{d}t + \underbrace{\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} N(t)\ \mathrm{d}t}_{N_T \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\sigma_n^2}{2T}\right)} \leq x_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} a\cos(\omega(t+R_j))\ \mathrm{d}t + N_T \leq x_0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\underbrace{a\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)}_{=a_T}\cos(\omega R_j) + N_T \leq x_0\right) \\
&= \mathbb{P}(a_T\cos(\omega R_j) + N_T \leq x_0)
\end{aligned}
$$

Pour aller plus loin : filtrage

Comment minimiser la probabilité suivante en fonction de T ?

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{3}\omega\sigma_j} \int_{\cos(\sqrt{3}\omega\sigma_j)}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \Phi\left(\frac{\sqrt{2T}}{\sigma_n}\left(x_0 - w \cdot a\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)\right)\right) \,\mathrm{d}w$$

Pour aller plus loin : filtrage

Comment minimiser la probabilité suivante en fonction de T ?

$$P_e = \boxed{\frac{1}{\sqrt{3}\omega\sigma_j} \int_{\cos(\sqrt{3}\omega\sigma_j)}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-w^2}}} \Phi\left(\frac{\sqrt{2T}}{\sigma_n}\left(x_0 - w \cdot a\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)\right)\right) \mathrm{d}w$$

Indep de T

Croissante car CDF

Il suffit de minimiser l'argument !

Pour aller plus loin : filtrage

Comment minimiser la probabilité suivante en fonction de T ?

$$P_e = \frac{1}{\sqrt{3}\omega\sigma_j} \int_{\cos(\sqrt{3}\omega\sigma_j)}^{1} \frac{1}{\sqrt{1-w^2}} \Phi\left(\frac{\sqrt{2T}}{\sigma_n}\left(x_0 - w \cdot a\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{\pi}\right)\right)\right) \, \mathrm{d}w$$

Voici un minimum approximatif, après un développement limité :

$$T_{\min} \approx \frac{1}{\omega}\sqrt{\frac{6}{5}}\left(1 - \frac{2x_0}{a(1+\cos(\sqrt{3}\omega\sigma_j))}\right)$$

Pour aller plus loin : filtrage

Probabilité d'erreur en fonction de la fenêtre de filtrage, à plusieurs niveaux de bruit gaussien